数理解析研究所講究録
534巻 1984年 335-349

Toughness and n-factors

東大理 榎本 彦衛 (Hikoe Enomoto)
斎藤 明 (Akira Saito)

ここでは向きのない単純グラフのみを考える。

Chvátal は [1] において

$$G\text{が } t\text{-tough} \iff [k(G-S) \geqq 2 \Rightarrow |S| \geqq t \cdot k(G-S)]$$

と定義した。ただし、t は実数で、$k(H)$ はグラフ H の連結成分の数を表わす。$\max\{t \mid G \text{ は } t\text{-tough}\}$ をグラフ G の toughness と呼び、$t(G)$ と書くことにする。G が完全グラフでない時には、

$$t(G) = \min\left\{ \frac{|S|}{k(G-S)} \;\middle|\; k(G-S) \geqq 2 \right\},$$

完全グラフの場合には、

$$t(K_m) = \infty$$

となる。Chvátal は上記論文において、

1) G : 1-tough, $|G|$: even $\Rightarrow$ G は 1-factor を持つ

2) G : Hamiltonian $\Rightarrow$ G は 1-tough

3) block の square は 2-tough

となることを示し、"2-tough ⇒ Hamiltonian" となることが証明できれば、"block の square は Hamiltonian" という定理の別証明となることを注意している。更に、

4) $(\frac{3}{2}-\varepsilon)$-tough だが、2-factor を持たないグラフ

5) $\frac{3}{2}$-tough だが Hamiltonian でないグラフ

を構成し、次の (6), (7) を予想した。

6) $\frac{3}{2}$-tough ⇒ 2-factor を持つ

7) $(\frac{3}{2}+\varepsilon)$-tough ⇒ Hamiltonian

しかし、$t(G) > \frac{3}{2}$ だが Hamiltonian でないグラフを Thomassen が構成したようで、[2] では

8) 2-tough ⇒ Hamiltonian

という予想に変っている。また、一般の場合には

9) G: n-tough, $n \cdot |G|$: even ⇒ G は n-factor を持つ

と [1] において予想されている。

我々は、[3] において、次の2つの定理を証明したが、ほぼ同じ頃に、定理1は B. Jackson と P. Katerinis (Goldsmiths' College)、定理2は N. Tsikopoulos (McGill University) によっても独立に証明されていることが講演後に判明した。

<u>定理1</u>　G : n-tough, $n\cdot|G|$: even, $|G| \geqq n+1$
$\Longrightarrow$ Gは n-factor を持つ

<u>定理2</u> 任意の自然数nと、任意の正数εに対し、$(n-\varepsilon)$-tough, $n\cdot|G|$: even, $|G| \geqq n+1$ だが、n-factorを持たないグラフGが存在する。

講演の終りに、toughness の定義を少し変え、

$$\tau(G) := \min\left\{ \frac{|S|}{k(G-S)-1} \;\middle|\; S \subseteq V(G) \right\}$$

を使って、定理1と同様の結果が得られないだろうか、と述べたが、$n \leqq 2$の場合にはうまくいくことがわかった。

<u>定理3</u>　$\tau(G) \geqq 1$, $|G|$: even $\Longrightarrow$ Gは 1-factorを持つ

<u>定理4</u>　$\tau(G) \geqq 2$, $|G| \geqq 3$　$\Longrightarrow$　Gは 2-factorを持つ

明らかに$\tau(G) > t(G)$ が成り立つので、これらの定理は定理1より強い結果になっている。残念ながら、$n \geqq 3$ の時には同様の結果は成り立たないが、定理1を改良することは可能である.

<u>定理5</u> 次の(1)〜(3)が成り立てば、Gは n-factorを持つ.

(1) $k(G-S) \geqq 2 \Longrightarrow |S| \geqq n\cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$

(2) $n\cdot|G|$: even

(3) $|G| \geqq n+1$

以下、定理5の証明の概略を述べることにする。

$V(G)$ の disjoint subsets A, B に対し、$G-A-B$ の連結成分 C は $n|C| + e(C, B)$ が奇数の時、奇成分と呼ばれ、奇成分の数は $h(A, B)$ と書かれる。また、

$$\delta(A, B) := n|A| + \sum_{x \in B} \{ d_{G-A}(x) - n \} - h(A, B)$$

と定義すると、

(A) $\delta(A, B) \equiv n \cdot |G| \pmod 2$

(B) n-factor が存在する $\Longleftrightarrow$ すべての A, B について $\delta(A, B) \geqq 0$

の成り立つことは良く知られている (Tutte の f-factor theorem と呼ばれているものの特別な場合.)。従って、G に n-factor が存在しないならば、$\delta(A, B) < 0$ となる A, B が存在するわけであるが、A を maximal に取ると、任意の $y \in V(G) - A - B$ について $e(y, B) \leqq n-1$ が成り立つ. 実際、$e(y, B) \geqq n$ とすると、$A' := A \cup \{y\}$ と置いた時、

$$\delta(A', B) = n|A'| + \sum_{x \in B} \{ d_{G-A'}(x) - n \} - h(A', B)$$

$$\leqq n|A| + n + \sum_{x \in B} \{ d_{G-A}(x) - n \} - e(y, B) - h(A, B) + 1$$

$$\leqq \delta(A,B)+1$$

となるが、(A) より $\delta(A',B) \equiv \delta(A,B) \pmod 2$ が成り立つので、$\delta(A',B) \leqq \delta(A,B) < 0$ となり、Aの極大性に反する。

このことから、次の補題を証明すれば、定理5の成り立つことがわかる.

補題6　$V(G)$ の disjoint subsets A, B で、次の性質(1)〜(4)を満たすものが存在したとする.

(1)　G は完全グラフではない

(2)　任意の $x \in A$ について、$\Gamma(x) = V(G) - \{x\}$.（ただし、$\Gamma(x)$ は x と隣接している頂点の集合を表わす。）

(3)　任意の $y \in V(G) - A - B$ について、$e(y, B) \leqq n-1$

(4)　$n|A| + \sum_{x \in B} \{ d_{G-A}(x) - n \} - k(G-A-B) \leqq -2$

この時、$V(G)$の部分集合 S であって、

(i)　$k(G-S) \geqq 2$

(ii)　$|S| < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$

を満たすものが存在する。

[証明]　1°) $|G| \leqq n+1$ の時には隣接していない2頂点 u, v を取り、$S := V(G) - \{u, v\}$ とおくと、$k(G-S) = 2$ かつ $|S| \leqq n-1 < 2n - \frac{7}{8}n$ が成り立つ。

以下、$|G| > n+1$ と仮定し、$|G|$ に関する帰納法を使う。

2°) 任意の $x \in B$ について $d_{G-A}(x) \geqq n$ が成り立つ時、$G-A-B$ の連結成分を $C_1, \cdots, C_r$ とし、C_i の元 y_i を任意に選ぶ。$R := \bigcup_{i=1}^{r} \Gamma(y_i) \cap B$ と置き、I を $B-R$ の maximal stable subset とする。$S := A \cup R \cup \Gamma(I)$ とおくと、

$$k(G-S) \geqq r + |I| \geqq r \geqq n|A| + \sum_{x \in B} \{d_{G-A}(x) - n\} + 2$$
$$\geqq 2,$$

$$|S| \leqq |A| + |R| + \sum_{x \in I} d_{G-A}(x)$$

$$\leqq |A| + r(n-1) + \sum_{x \in I} \{d_{G-A}(x) - n\} + n|I|$$

$$\leqq n|A| + \sum_{x \in B} \{d_{G-A}(x) - n\} - r - (n-1)|A| + rn + n|I|$$

$$\leqq -2 + n \cdot k(G-S) - (n-1)|A|$$

が成り立つ。$A \neq \phi$ ならば

$$|S| \leqq n \cdot k(G-S) - n - 1 < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$$

となるので、$A = \phi$ としてよい。

すべての $x \in B$ について $d_G(x) = d_{G-A}(x) > n$ とすると、(4) より $|B| - r \leqq -2$ となり、

$$k(G-B) = r \geqq |B| + 2 \geqq 2,$$

$$|B| \leqq r - 2 \leqq n \cdot r - n < n \cdot k(G-B) - \frac{7}{8}n$$

が成り立つ。従って、次数が n の頂点 x が B に存在する。

そこで、$S := \Gamma(x)$ とおくと、

$$k(G-S) \geqq 2 \quad (\because\ |G| > n+1 \text{ より } V(G) - S - \{x\} \neq \phi)$$

$$|S| = n \leqq n \cdot k(G-S) - n < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8} n$$

が成り立つ。

以下、$d_{G-A}(x) < n$ となる B の点 x が存在する場合を考える。

3°) B の点 x が $d_{G-A}(x)$ が最小のものを取る。n 点部分集合 R で $R - A = \Gamma(x) - A$ となるものを任意に取り、

$G' := G - R - \{x\}$, $A' := A - R$, $B' := B - R - \{x\}$,

$\alpha := |A \cap R|$, $\beta := |B \cap R|$ とおくと、

$$(4') \quad n|A'| + \sum_{y \in B'} \{ d_{G'-A'}(y) - n \} - k(G' - A' - B')$$

$$\leqq n(|A| - \alpha) + \sum_{y \in B'} \{ d_{G-A}(y) - n \} - \{ k(G-A-B) - (n-\alpha-\beta) \}$$

$$\leqq n|A| + \sum_{y \in B} \{ d_{G-A}(y) - n \} - k(G-A-B) - n\alpha$$

$$-(\beta+1)(n-\alpha-n) + n - \alpha - \beta$$

$$\leqq -2 - (n-\beta)(\alpha-1)$$

$$\leqq -2 \quad (\because\ n > \beta,\ \alpha = n - d_{G-A}(x) > 0)$$

が成り立つ。

従って、G' が完全グラフでなければ、帰納法により、

$k(G'-S') \geqq 2$, $|S'| < n \cdot k(G'-S') - \frac{7}{8} n$ となる S'

が存在する。（仮定 (2) より $A' \subseteq S'$ となることに注意。）
そこで、$S := R \cup S'$ とおくと、

$$k(G-S) = k(G'-S') + 1 \geqq 2,$$
$$\begin{aligned} |S| &= |R| + |S'| \\ &< n + n \cdot k(G'-S') - \frac{7}{8}n \\ &= n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n \end{aligned}$$

となる。

以下、G' が完全グラフの場合を考える。

4°) $\alpha' := |A'|$, $\beta' := |B'|$, $\gamma' := |V(G) - \{x\} - R - A'|$, $\gamma := |R - A|$ とおく。x として $d_{G-A}(x)$ が最小のものを選んだことと、G' が完全グラフであることより、$y \in B'$ ならば、

$$d_{G-A}(y) \geqq \max\{\gamma, \gamma'-1\}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} k(G-A-B) &\leqq |V(G) - A - B| \\ &= \gamma - \beta + \gamma' - \beta' \end{aligned}$$

が成り立つので、条件 (4) より

$$n(\alpha + \alpha') + (\beta+1)(\gamma - n) + \beta'\{\max\{\gamma, \gamma'-1\} - n\}$$
$$-(\gamma - \beta) - (\gamma' - \beta') \leqq -2$$

が得られる。従って、

$$n\alpha' \leqq \beta(n-r-1)+\beta'(n-1-\max\{r, r'-1\})$$
$$-n^2+n-2+nr+r'$$

となるが、$\beta \leqq r$, $\beta' \leqq r'$, $n-r-1 \geqq 0$, $n-r' \geqq 0$ が示せるので、
(また(4')より)

$$n\alpha' \leqq r(n-r-1)+r'(n-1-\max\{r, r'-1\})$$
$$-n^2+n-2+nr+r'$$
$$=(2n-1)r-r^2+r'n-r'\cdot\max\{r, r'-1\}$$
$$-n^2+n-2$$

となる。

$r \geqq r'+1$ の時

$$n\alpha' \leqq r(2n-1)-r^2+r'(n-r)-n^2+n-2$$
$$\leqq r(2n-1)-r^2+(r-1)(n-r)-n^2+n-2$$
$$=3rn-2r^2-n^2-2$$
$$\leqq \frac{1}{8}(n^2-2)$$

となる．従って．$S:=R\cup A'$ とおくと．$k(G-S)\geqq 2$,

$$|S|=n+\alpha' \leqq \frac{9}{8}n-\frac{1}{4n}$$
$$< n\cdot k(G-S)-\frac{7}{8}n$$

が成り立つ．

以下．$r \leqq r'$ の場合を考える。

$$n\alpha' \leqq (2n-1)r-r^2+r'(n+1-r')-n^2+n-2$$

より、$r \geqq (n+1)/2$ ならば．

$$n\alpha' \leqq (2n-1)r - r^2 + r(n+1-r) - n^2 + n - 2$$
$$= 3nr - 2r^2 - n^2 + n - 2$$
$$\leqq \frac{9}{8}n^2 + n - 2,$$

$r \leqq (n+1)/2$ ならば、

$$n\alpha' \leqq (2n-1)r - r^2 + \frac{(n+1)^2}{4} - n^2 + n - 2$$
$$= \frac{3n-5}{2}$$
$$\leqq \frac{9}{8}n^2 + n - 2$$

となる。

いずれにしても、$S := R \cup A'$ とおくと、$k(G-S) \geqq 2$,

$$|S| = n + \alpha' \leqq \frac{9}{8}n + 1 - \frac{2}{n}$$
$$< n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n + 1$$

が成り立つ。

$D := R - A$, $D' := V(G) - \{x\} - R - A'$ とおく。Dの部分集合Xで、$|\Gamma(X) \cap D'| < |X|$ となるものがあれば、$S := (R-X) \cup A' \cup (\Gamma(X) \cap D')$ とおくと、

$$k(G-S) \geqq 2 \qquad (\because\ D' - \Gamma(X) \neq \phi)$$
$$|S| < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n + 1 \quad -1$$

となることが上と同様にしてわかる。

以下、Dの任意の部分集合Xに対して$|\Gamma(X) \cap D'| \geqq |X|$が成り立つと仮定する。特に、Dの任意の元$y$について$\Gamma(y) \cap D' \neq \phi$。また、$|\Gamma(D) \cap B'| \geqq r - (r' - \beta')$ に注意。

5°) $$\sum_{y\in B'} d_{G-A}(y) \geqq \beta'(\gamma'-1) + e(B', D)$$
$$\geqq \beta'(\gamma'-1) + \gamma - (\gamma'-\beta')$$

より、

$$n\alpha' \leqq \beta(n-\gamma+1) + \beta'(n+1) - \beta'(\gamma'-1) - \gamma + \gamma' - \beta'$$
$$-n^2 + n - 2 + n\gamma - 2\gamma - \gamma'$$
$$= \beta(n-\gamma+1) + \beta'(n-\gamma'+1) + (n-3)\gamma$$
$$-n^2 + n - 2$$

となる。4°) と同様の計算により、$\beta' < \gamma'$ ならば

$$n\alpha' \leqq \gamma(n-\gamma+1) + (\gamma'-1)(n-\gamma'+1) + (n-3)\gamma$$
$$-n^2+n-2$$
$$\leqq \frac{1}{8}n^2 - 3,$$

$\beta < \gamma$ ならば、

$$n\alpha' \leqq (\gamma-1)(n-\gamma+1) + \gamma'(n-\gamma'+1) + (n-3)\gamma$$
$$-n^2+n-2$$
$$\leqq \frac{1}{8}n^2 - 3$$

となる。

従って、$\beta=\gamma$, $\beta'=\gamma'$ の場合を考えればよい。

6°) $B_1 := \{ y \in D = R \cap B \mid d_{G-A}(y) = \gamma, |\Gamma(y) \cap B'| = 1 \}$

とおく。

$$\sum_{y \in D} \{d_{G-A}(y) - d_{G-A}(x)\} + e(B', D) \geqq 2\gamma - |B_1|$$

なので、$B_1 = \phi$ ならば、

$$n\alpha' \leqq \gamma(n-\gamma+1) + \gamma'(n+2-\gamma') - 2\gamma$$
$$-n^2+n-2+n\gamma-2\gamma-\gamma'$$
$$\leqq \frac{1}{8}(n^2-4n-12)$$

となるので $B_1 \neq \phi$ としてよい。もう少し一般に、

$$M := \sum_{y \in D} \{d_{G-A}(y) - d_{G-A}(x) + |\Gamma(y) \cap B'|\} \geqq 2\gamma - 2$$

ならば、

$$n\alpha' \leqq \frac{1}{8}(n^2-4n+4)$$

となり、定理が成り立つ。

$y \in B_1$ ならば、$D - \Gamma(y)$ は1点になる。この点を $\varphi(y)$ と書くことにする。

<u>Case 1</u> $\varphi(y) \in B_1$ となる $y \in B_1$ が存在するとき。

x のかわりに y を使う。すなわち、$S := \Gamma(y) \cup A$ とおくと、$e(\varphi(y), \Gamma(y) \cap B) = \gamma - 1$ となり、

$$\sum_{z \in \Gamma(y) \cap B} \{d_{G-A}(z) - \gamma + |(\Gamma(z) - \Gamma(y) - \{y\}) \cap B|\} \geqq 2\gamma - 2$$

が成り立つ。

Case 2 任意の $z \in \varphi(B_1)$ について、

$$d_{G-A}(z) - r + e(z, B') \geqq 2 + |\varphi^{-1}(z)|$$

が成り立つ時、

$$M = \sum_{z \in \varphi(B_1)} \{ d_{G-A}(z) - r + e(z, B') + |\varphi^{-1}(z)| \}$$

$$+ \sum_{w \in D - B_1 - \varphi(B_1)} \{ d_{G-A}(w) - r + e(w, B') \}$$

$$\geqq 2|D|$$

$$= 2r$$

となる。

Case 3 ある $z \in \varphi(B_1)$ について、

$$d_{G-A}(z) - r + e(z, B') < 2 + |\varphi^{-1}(z)|$$

となる時、$\Gamma(z) \cap \varphi^{-1}(z) = \phi$ より

$$d_{G-A}(z) - r + |\varphi^{-1}(z)| \leqq e(z, B')$$

に注意すると、

$$2r \leqq 2d_{G-A}(z) \leqq 2r + 1$$

となるので、$d_{G-A}(z) = r$ がわかる。従って、任意の $y \in \varphi^{-1}(z)$ に対し、

$$|\Gamma(z) \cap \Gamma(y) \cap B| \geqq r - |\varphi^{-1}(z)| - 1$$

が成り立つ。以下、$l := |\varphi^{-1}(z)|$ とおく。

$$|\Gamma(z) \cap D| = r - l - 1$$

の時には、x のかわりに z を使うことにすると、

$$e(B-\{z\}-\Gamma(z),\ \Gamma(z)) \geqq \ell(\gamma-\ell)+\gamma-\ell$$

となり、$1 \leqq \ell \leqq \gamma-2$ の時には O.K. $\ell=\gamma-1$ の時には、

$$\varphi^{-1}(z) \subseteq \Gamma(x)-\Gamma(z)-\{z\}$$

より

$$\sum_{w \in \Gamma(z)\cap B} |\Gamma(w)\cap(B-\Gamma(z)-\{z\})| \geqq 2\gamma-2$$

となる。

$$|\Gamma(z)\cap D| = \gamma-\ell-2$$

の時には、$D-\Gamma(z)-\{z\}-\varphi^{-1}(z)$ は1点になるので、その点を w とする。$e(D, B') \leqq 2\gamma-3$ とすると、

$$2\gamma-3 \geqq \ell+1+e(w, B')+\gamma-2$$

より $e(w, B') \leqq \gamma-\ell-2$，従って，$|\Gamma(z)\cap\Gamma(w)\cap B| \geqq \ell+2$ となる。$1 \leq \ell \leq \gamma-2$ に注意すると、

$$\begin{aligned} e(\Gamma(z),\ B-\{z\}-\Gamma(z)) &\geqq \ell(\gamma-\ell-1)+(\ell+2)+(\gamma-\ell-1) \\ &\geqq 2\gamma-1 \end{aligned}$$

となる。

これで補題6（従って定理5）が証明できたことになる。次のような例を考えると、この結果が best possible に近いことがわかる。

例 $G := L(K_{2,l}) + K_m$ とすると、

(i) $nm + 2l(l-n) < 0$ ならば n-factor を持たない。

(ii) $k(G-S) \geqq 2$ ならば、$k(G-S) = 2$ かつ $|S| \geqq l+m$.

従って、$n \geqq 4$ ならば、$n \cdot |G| = \text{even}$, G は n-factor を持たないが、

$$k(G-S) \geqq 2 \Rightarrow |S| \geqq \left\lfloor \frac{9n-1}{8} \right\rfloor$$

が成り立つように l, m が選べる。たとえば、

$$n = 16p + 1 \quad (p > 0)$$

の時には、

$$l = 12p + 1$$

$$m = 6p$$

とすると、$k(G-S) \geqq 2 \Rightarrow |S| \geqq \frac{9}{8}n - \frac{1}{8}$ となる。

文献

[1] V. Chvátal, Tough graphs and hamiltonian circuit, Discrete Math. 5 (1973) 215–218

[2] J.A. Bondy - U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, MacMillan (1976)

[3] H. Enomoto - A. Saito, Toughness and n-factors of finite graphs, Technical Report 84-03, Department of Information Science, University of Tokyo (1984)